

Tutorial 1

Exercise 1 (4+2 Punkte).

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Kopf erscheint. Tritt der erste Kopf beim n -ten Wurf auf, so erhält der Spieler eine Auszahlung von 2^{n-1} Euro, und das Spiel endet. Sei

$$X : \Omega \rightarrow \{1, 2, 4, 8, \dots\}.$$

die Zufallsvariable, die den Gewinn des Spielers ausdrückt.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = 2^{n-1})$ für jedes $n \geq 1$.
- (b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert dieses Glücksspiels unendlich ist, d. h. $\mathbb{E}[X] = +\infty$.
- (c) (optional) Sei $U : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng wachsende und konkave Nutzenfunktion. Das *Sicherheitsäquivalent* CE ist definiert als die Lösung der Gleichung

$$U(CE) = \mathbb{E}[U(X)].$$

Berechnen Sie den erwarteten Nutzen und das Sicherheitsäquivalent für die folgenden Nutzenfunktionen:

- (i) $U(x) = \sqrt{x}$,
- (ii) $U(x) = \log(x)$.

Exercise 2 (4 Punkte).

Zeigen Sie: Sei Ω eine Menge, I eine beliebige Indexmenge und sei $A_i \subseteq \Omega$ für alle $i \in I$. Dann gilt

(a)

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

(a)

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Exercise 3 (4 Punkte).

Sei $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Folge messbarer Ereignisse auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $\mathbb{P}(A_n) = 1$ für alle $n \geq 1$ gilt, so folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = 1.$$

(b) Falls $\mathbb{P}(A_n) = 1$ für ein $n \geq 1$ gilt, so folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = 1.$$

Exercise 4 (6+2 Punkte).

Betrachten Sie das viermalige Werfen eines fairen Würfels. Konstruieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, formalisieren Sie die Ereignisse

- (a) Das Maximum der erhaltenen Augenzahlen ist höchstens 4.
- (b) Das Maximum der erhaltenen Augenzahlen ist genau 4.
- (c) Das Minimum der erhaltenen Augenzahlen ist höchstens 4.
- (d) (optional) Eine strikt absteigende Folge wird geworfen.

und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.