

Tutorial 2 - Frist: 21.11.2025

Exercise 1 (4 Punkte).

Ein Skatspiel wird nach gründlichem Mischen verteilt. Jeder der drei Spieler erhält 10 Karten, die restlichen 2 Karten werden in den Skat gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält

- (a) Spieler 1 genau zwei Buben?
- (b) Spieler 1 alle 4 Buben?
- (c) jeder der 3 Spieler genau einen Buben?

Für Nicht-Skatspieler: Sie verteilen 28 gelbe und 4 blaue Kugeln (entsprechen den Buben) zufällig auf 3 große Schachteln (entsprechen den Karten der 3 Spielern) zu je 10 Kugeln und eine kleine Schachtel (entspricht dem Skat) mit 2 Kugeln.

Exercise 2 (4 Punkte).

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) Sei $\mathbb{P}(B) > 0$ und eine Abbildung $\mathbb{P}_B: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_B$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist, das heißt:

- $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$,
- $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,
- und für jede abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen $A_1, A_2, \dots$ gilt

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_i).$$

- (b) Seien $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ und $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B)$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A \mid B^c)$ gilt.
- (c) Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exercise 3 (4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Erinnern Sie sich an die folgenden beiden Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes:

(1) σ -Additivität für paarweise disjunkte Mengen. Sind $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ paarweise disjunkt (d. h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$), so gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

(2) Monotonie. Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \subseteq B$ gilt

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Zeigen Sie mithilfe der σ -Additivität für paarweise disjunkte Mengen die folgende Aussage:

σ -Subadditivität: Für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$