universität freiburg

Stochastik I

Wintersemester 2025/2026

Dozent: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Lehrassistent: Simone Pavarana MSc.

Tutorial 3 - Frist: 5.12.2025

Exercise 1 (3 Punkte).
Sei $S = (S_n)_{n \geq 1}$ der einfache symmetrische Zufallsweg (random walk) definiert durch

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt seien mit

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{E}[|S_n|] < \infty$ für alle $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_1 = k_1, \ldots, S_n = k_n] = k_n \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Exercise 2 (4 Punkte).
Konstruiere ein Beispiel für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ und drei Ereignisse A_1, A_2, A_3, die paarweise unabhängig sind, d. h.

$$A_1 \perp A_2, \quad A_2 \perp A_3, \quad A_3 \perp A_1,$$

die jedoch nicht gemeinsam (vollständig) unabhängig sind, also nicht

$$A_1 \perp A_2 \perp A_3.$$

Hinweis: Wählen Sie A_1 und A_2 so, dass die Beobachtung jeweils eines der beiden Ereignisse keine Information über A_3 liefert, ihre gemeinsame Beobachtung jedoch die Wahrscheinlichkeit von A_3 beeinflusst.

Alternative Formulierung: Wählen Sie Zufallsvariablen X, Y, Z so, dass $X \perp Z$ und $Y \perp Z$ gelten, die gemeinsame Information (X, Y) jedoch nicht unabhängig von Z ist; definieren Sie dann A_1, A_2, A_3 als geeignete Ereignisse dieser Variablen.

Exercise 3 (4 Punkte).
Betrachten Sie eine Variante des Ziegenproblems mit **vier** Türen. Hinter einer Tür befindet sich ein Auto, hinter den übrigen drei Türen eine Ziege. Die Kandidatin bzw. der Kandidat wählt zunächst eine Tür aus.

(a) Der Showmaster öffnet nun eine der drei verbleibenden Türen und zeigt, dass sich dahinter eine Ziege befindet. Nachdem er eine Tür mit einer Ziege geöffnet hat, fragt er

die Kandidatin bzw. den Kandidaten, ob sie bzw. er zu einer der noch geschlossenen Türen wechseln möchte.
Ist es vorteilhaft zu wechseln? *Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie annehmen, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet und der Showmaster Tür 4 öffnet. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto hinter Tür 1 ist, gegeben dass Tür 4 geöffnet wurde.*

(b) Die Kandidatin bzw. der Kandidat trifft nun eine neue Entscheidung (bleiben oder wechseln). Bevor der Gewinn aufgedeckt wird, öffnet der Showmaster eine zweite Tür unter den noch geschlossenen Türen, die ebenfalls eine Ziege enthält. Anschließend fragt er erneut, ob ein Wechsel gewünscht ist.
Ist es in dieser zweiten Entscheidungsrunde vorteilhaft zu wechseln?

Exercise 4 (4 Punkte)**.**
Es sei $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ geometrisch verteilt zum Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Zeigen Sie, dass X *gedächtnislos* ist, d.h. dass für $k,l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(X > k + l \mid X > l\right) = \mathbb{P}(X > k).$$